Для начала забудем на время все, что писалось на форуме – там я с переменным успехом пытался говорить на понятном широкой публике языке. Сформулируем задачу более-менее строго, по дороге, я надеюсь, будут ответы на Ваши вопросы о ch итп. Итак, имеется плоская поверхность воды, снизу подпираемая постоянным давлением, много большим, чем высота столба воды. В плоскости XY поверхность ограничена и скорость на границе в направлении, перпендикулярном стенкам равна 0. Для простоты, что бы не возится с функциями Бесселя, будем считать границу (горло) квадратом со стороной a (сути это не изменит, а считать проще). Требуется найти условия, при которых такая поверхность теряет устойчивость.

Под потерей устойчивости понимается следующее. Поверхность считается устойчивой, если выбрав начальную границу в момент времени $t = 0$ слегка отличной от плоской во все последующие моменты времени ее отличие от плоской остается слабым (можно это условие сформулировать на ϵ-δ языке, но, по-моему, и так ясно что имеется ввиду). То есть, другими словами, надо решить такую задачу. Есть уравнения Навье-Стокса (жуткие, нелинейные, нерешаемые). Для них есть частное решение $\mathbf{V}(x, y, z, t) \equiv 0$, ($\mathbf{V}$ – скорость жидкости в данной точке), соответствующее плоской поверхности (проверяется прямой подстановкой). Возмем другое распределение скоростей $\mathbf{V}'(x, y, z)$, в каком-то смысле (в каком - позже) малых, но произвольных в качестве начальных условий: $\mathbf{V}(x, y, z, t = 0) = \mathbf{V}'(x, y, z)$ и посмотрим, останутся ли все скорости навсегда конечными (колебательный процесс), или они в некоторой области (или везде) начнут расти со временем и вконце концов станут бесконечными (часть воды или вся вода выльется).

В такой формулировке кажется, что нужно решить Навье-Стокса для любых начальных условий, что пока никому не удалось. Однако знаменитый математик (Ляпунов) доказал теорему, которая с несущественными для нас оговорками звучит так: "Система, неустойчивая в линейном приближении остается неустойчивой в нелинейном". Это значит, что если в уравнениях выкинуть все нелинейные члены (иногда для этого требуется что-нибудь разложить в ряд Тейлора и оставить только два первых члена), и оставить только линейные члены по скоростям и их производным, и решить уже гораздо более простую задачу – найти решение линейного уравнения для любых начальных условий, то если для каких-то условий в линейной задаче скорости убегут на бесконечность, то тоже они сделают и в нелинейной, правда по-другому.

Теперь применим эту программу к нашей бутылке. Самую трудную часть – линеаризацию за нас сделал W. Thomson в 1871 году, написав линеаризованное уравнение движения вблизи свободной поверхности жидкости (для простоты несжимаемой и не вязкой). При этом предполагалось, что размер возмущения плоской поверхности вдоль поверхности (в плоскости XY) много больше его высоты (размера по Z). Это условие и будет в дальнейшем считаться условием малости возмущения. Вывод уравнения опускаю, а само уравнение такое:

$$\rho g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{1}$$

Здесь φ – т.наз. потенциал скоростей, — при сделанных предположениях (не вязкая, не сжимаемая жидкость) всегда можно придумать функцию φ (скалярную), такую, что $\mathbf{V} = -\nabla\varphi$ (типа потенциала в электорстатике). На границах нашего квадрата надо потребовать равенство нулю нормальной компоненты скорости, кроме того, скорость должна стремиться к нулю при $z \to \infty$, поэтому гран. условия к (1) будут

$$\frac{\partial\varphi(0,y,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(x,0,z,t)}{\partial y} = \frac{\partial\varphi(a,y,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(x,a,z,t)}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Вместо того, что бы честно решить (1) и (2) (это можно, но долго и ответ такой же), просто угадаем набор частных решений:

$$\varphi_{m,n}(x,y,z,t) = e^{(k_x^2+k_y^2)z}\cos(k_x x)\cos(k_y y)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)), \qquad (3)$$

где $k_x = \frac{\pi}{a}n$, $k_y = \frac{\pi}{a}m$ и m с n – любые целые положительные числа. Видно, что (3) удволетворяет граничным условиям (2) и как надо убывает по z. Подставив (3) в (1) получим связь ω с k_x, k_y (закон дисперсии):

$$gk^2 + \frac{\alpha}{\rho}(k^2)^2 = \omega^2, \qquad (4)$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Теперь путь открыт к успеху для любого начального потенциала скоростей, лишь бы этот потенциал удволетворял граничным условиям. Раскладываем его по $\cos(k_x x)\cos(k_y y)$ – это обычный ряд фурье, коэффиценты разложения умножаем на $\cos(\omega t + \Phi_0)$ (Φ_0 – начальная фаза, ее всегда можно сделать нулем) и наблюдаем за развитием событий.

Это решение работает как для обычной, так и для перевернутой поверхности. Если поверхность перевернута, то уравнение (1) будет такое же, но g следует считать отрицательным (переворот системы и изменение направления силы тяжести – это одно и тоже, поэтому $F = mg$ перейдет в $F = -mg$, значит $g \to -g$). Тогда, заменив в (4) g на $-g$, и обозначив k^2 буквой q получим

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho}q^2 - gq \qquad (5)$$

Если $q < \frac{g\rho}{\alpha}$, то ω^2 отрицательна, если больше – то положительна. Значит надо следить за самыми маленькими q. Для них во временной зависимости может возникнуть тот самый $\mathrm{ch}(\omega t)$. Самое маленькое q, которое у нас может получиться это $\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2$, стало быть, если $a > 2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}$, то поверхность неустойчива в линейном приближении, а значит — и в нелинейном.

Для скорости вязкость не учитывалась, поэтому размер по написанной формуле получится существенно меньше, чем в реальности. С учетом вязкости совпадение вроде как хорошее.